

Κεφάλαιο 1. Η Κβαντική θεωρία του φωτός

Εδάφια:

- 1.a. Κλασική θεωρία - Ηλεκτρομαγνητικά κύματα
- 1.b. Ακτινοβολία μέλανος σώματος
- 1.c. Νόμος του Planck
- 1.d. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και φωτόνια
- 1.e. Φαινόμενο Compton
- 1.f. Ο κυματοσωματιδιακός δισμός του φωτός
- 1.g. Χρήσιμοι μαθηματικοί τύποι

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε επιγραμματικά τα φαινόμενα που οδήγησαν στην ιδέα της σωματιδιακής φύσης του φωτός, από την οποία ξεκίνησε η γέννηση της Κβαντικής θεωρίας. Τα φαινόμενα αυτά είναι η ακτινοβολία μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και το φαινόμενο Compton.

1.a Κλασική θεωρία - Ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) κύματα

Πριν την Κβαντομηχανική, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, η Φυσική κυριαρχούνταν από την Κλασική Θεωρία. Η Κλασική Θεωρία συνίσταται από τα

Νευτώνια μηχανική: $F=ma$ (αναθεωρήθηκε από τη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας του Αϊνστάιν).

Κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό: Εξισώσεις του Maxwell. (Τα ΗΜ κύματα διαδίδονται στο κενό. Παράγονται από κάθε εναλλασσόμενη ροή ρεύματος (ή ταλάντωση φορτίων) και η συχνότητά τους είναι ίση με εκείνη των ταλαντώσεων του ρεύματος. Η ενέργειά τους είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.)

Κλασική στατιστική: Θεώρημα ισοκατανομής (σε κάθε βαθμό ελευθερίας που εμφανίζεται με το τετράγωνό του στην έκφραση της ενέργειας αντιστοιχεί μέση ενέργεια $k_B T/2$, $k_B=8.6 \times 10^{-5}$ eV K⁻¹ η σταθερά του Boltzmann.)

1.b Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Κάθε σώμα που θερμαίνεται εκπέμπει ακτινοβολία, η οποία σε χαμηλές θερμοκρασίες είναι στο υπέρυθρο (άρα αόρατη) και όσο αυξάνεται η θερμοκρασία μετατοπίζεται προς το ορατό. Η εκπεμπόμενη θερμική ακτινοβολία εξαρτάται από τη συχνότητα, τη θερμοκρασία και την απορροφούμενη ισχύ (όσο περισσότερο απορροφά ένα σώμα τόσο περισσότερο εκπέμπει).

Το **μέλαν σώμα** ορίζεται ως ένα αντικείμενο που απορροφά όλη την ακτινοβολία που πέφτει πάνω του, σε όλες τις συχνότητες (για αυτό και φαίνεται μαύρο), Για μέλαν σώμα η εκπεμπόμενη ισχύς είναι συνάρτηση **μόνο** της συχνότητας (f) και της θερμοκρασίας (T) και είναι μέγιστη. Άρα το μέλαν σώμα είναι ένας ιδανικός εκπομπός, το πρότυπο για να μελετήσει κανείς τη θερμική εκπομπή των σωμάτων (οι τύποι είναι απλούστεροι).

Η καλύτερη αναπαράσταση μέλανος σώματος είναι μια θερμαινόμενη κοιλότητα (π.χ. ένας φούρνος). Αν ανοίξει κανείς μια οπή σε φούρνο, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία έχει όλα τα χαρακτηριστικά της ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

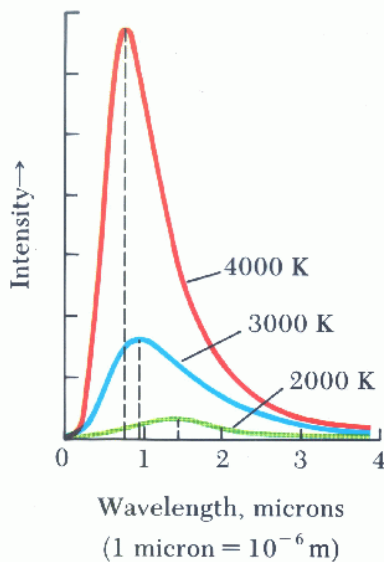
Σύμφωνα με την **κλασική φυσική**, η ακτινοβολία της κοιλότητας προέρχεται από τις ταλαντώσεις των φορτισμένων σωματιδίων στα τοιχώματα της κοιλότητας και η συχνότητά της είναι ίση με τη συχνότητα των ταλαντώσεων αυτών. Η ενέργεια της ακτινοβολίας μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Μεγέθη για την περιγραφή της ακτινοβολίας μέλανος σώματος:

- $I(f, T)$ είναι η εκπεμπόμενη ισχύς (ενέργεια/χρόνος) ανά μονάδα επιφάνειας και συχνότητας – λέγεται φασματική ένταση της ακτινοβολίας.
- $u(f, T)$ είναι η φασματική πυκνότητα ενέργειας, δηλ. η ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας και όγκου στην κοιλότητα που αναπαριστά το μέλαν σώμα. Ισχύει ότι $I(f, T) = u(f, T) c/4$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Τα μεγέθη αυτά μπορούν να γραφούν και ως συνάρτηση του μήκους κύματος, λ , χρησιμοποιώντας τις $I(\lambda, T)d\lambda = I(f, T)df$, $u(\lambda, T)d\lambda = u(f, T)df$, $\lambda f = c$.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος, $I(\lambda, T)$, ως συνάρτηση του μήκους κύματος και της θερμοκρασίας έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχ. 1.



Σχ. 1. Ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από μέλαν σώμα ως συνάρτηση της συχνότητας και της θερμοκρασίας.

Βασικά χαρ/κά της ακτινοβολίας μέλανος σώματος - Εμπειρικοί νόμοι

- Το φάσμα (ένταση εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ως συνάρτηση της συχνότητας) του μέλανος σώματος είναι συνεχές με ένα ευρύ μέγιστο. Εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία.
- Η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας, $I(T)$, ($I(f, T)$ ολοκληρωμένο ως προς συχνότητα) είναι ανάλογη προς την τέταρτη δύναμη της απόλυτης θερμοκρασίας: $I(T) = \sigma T^4$. *Νόμος Stefan-Boltzmann*. ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^2\text{K}^{-4}$ είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann.)
- Καθώς η θερμοκρασία αυξάνει το μέγιστο της καμπύλης εκπομπής μετακινείται προς υψηλότερες συχνότητες (μικρότερα μήκη κύματος). Η μετακίνηση αυτή περιγράφεται από τον *Νόμο μετατόπισης του Wien*: $\lambda_{max} T = 0.2898 \text{ cm K}$ (λ_{max} είναι το μήκος κύματος το οποίο η εκπομπή ακτινοβολίας γίνεται μέγιστη).
- Για χαμηλές συχνότητες (μεγάλα μήκη κύματος) η εκπομπή μέλανος σώματος περιγράφεται από τον *νόμο των Rayleigh-Jeans*: $I(\lambda, T) = E_{av} 2\pi c/\lambda^4$, όπου $E_{av} = k_B T$

(σύμφωνα με τον Boltzmann) είναι η μέση ενέργεια (ανά ταλαντωτή) των ταλαντωτών που εκπέμπουν την ακτινοβολία. k_B είναι η σταθερά του Boltzmann.

- Για υψηλές συχνότητες (μικρά μήκη κύματος) η εκπομπή μέλανος σώματος περιγράφεται από τον εκθετικό νόμο του Wien (πειραματικός νόμος): $I(\lambda, T) = (A/\lambda^5) e^{-B/\lambda T}$, A, B σταθερές.

Πρόβλημα στη μελέτη του μέλανος σώματος: Η ακτινοβολία μέλανος σώματος δεν μπορούσε να περιγραφεί με βάση την υπάρχουσα κλασική θεωρία, κατά την οποία οι υπεύθυνοι για την ακτινοβολία ταλαντωτές (άρα και η ακτινοβολία της κοιλότητας) μπορούν να έχουν οποιαδήποτε ενέργεια, ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους.

1.c. Νόμος του Planck

Το παραπάνω πρόβλημα λύθηκε από τον Planck, ο οποίος έδωσε τον τύπο που περιγράφει σωστά την ακτινοβολία μέλανος σώματος για κάθε περιοχή συχνοτήτων (Για την εργασία του αυτή πήρε το βραβείο Nobel, το 1918.) Οι υποθέσεις-κλειδιά του Planck ήταν:

- Οι ενέργειες των ταλαντωτών που βρίσκονται στα τοιχώματα της κοιλότητας μπορούν να πάρουν μόνο διακριτές τιμές, nhf , όπου n είναι τυχόν ακέραιος και h σταθερά, είναι δηλ. κβαντισμένες.
- Οι ενέργεια της ακτινοβολίας που μπορούν να απορροφήσουν ή να εκπέμψουν οι ταλαντωτές (άρα της ακτινοβολίας που υπάρχει στην κοιλότητα) είναι κβαντισμένη. Παίρνει τις τιμές

$$E_n = nhf = nhc/\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

που ονομάζονται κβάντα ενέργειας. Οι ταλαντωτές εκπέμπουν ή απορροφούν ενέργεια μόνο όταν "πηδούν" από μια κατάσταση ταλάντωσης σε μια άλλη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $E_n = nhf = nhc/\lambda$, τον υπολογισμό της πυκνότητας των ταλαντωτών στην κοιλότητα που είχαν χρησιμοποιήσει και οι Rayleigh-Jeans και το αξίωμα ότι η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σύστημα σε δοσμένη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την ενέργεια της κατάστασης και τη θερμοκρασία και έχει τη μορφή $P(E) = A e^{-E/k_B T}$, μπορεί να εξαχθεί εύκολα ο τύπος του Planck:

$$u(f, T) = (8 \pi^2 / c^3) [hf / (e^{hf/kT} - 1)]$$

ή μέσω των $I(\lambda, T)$:

$$I(\lambda, T) = (2\pi c / \lambda^4) [(hc/\lambda) / (e^{hc/\lambda kT} - 1)].$$

h είναι η σταθερά του Planck, $h = 6.67 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.11 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$. $k = k_B$ είναι η σταθερά του Boltzmann, $k_B = 8.6 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$. Σε θερμοκρασία δωματίου, $T = 300 \text{ K}$, $k_B T = (1/40) \text{ eV}$.

Η σταθερά κανονικοποίησης, A , στην πιθανότητα $P(E)$ προσδιορίζεται από την απαίτηση η ολική πιθανότητα (ολοκλήρωμα σε όλες τις δυνατές ενέργειες) να είναι μονάδα, δηλ. $A = 1 / \int e^{-E/k_B T} dE$

Πιθανότητα και μέση τιμή: Πώς υπολογίζεται η μέση τιμή ενός μεγέθους A (π.χ. E) αν γνωρίζουμε την πιθανότητα της κάθε δυνατής τιμής του, $P(A_n)$; $A_{av} = \sum_n A_n P(A_n)$. Αν το A παίρνει συνεχείς τιμές, $P(A) dx$ είναι η πιθανότητα να είναι μεταξύ A και $A+dA$ και η μέση τιμή είναι $A_{av} = \int A P(A) dA$.

1.d. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και φωτόνια

Με τον όρο "φωτοηλεκτρικό φαινόμενο" χαρακτηρίζεται η εκπομπή ηλεκτρονίων (φωτοηλεκτρονίων) από ένα μέταλλο όταν πέσει πάνω σε αυτό ορατό ή υπεριώδες φως.

Το "φωτοηλεκτρικό φαινόμενο" ανακαλύφθηκε από τον Hertz (το 1887) και ερμηνεύθηκε από τον Αϊνστάιν (το 1905), ο οποίος πήρε για την ερμηνεία του το Nobel Φυσικής (το 1921).

Πειραματικά δεδομένα για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (τα οποία δεν μπορούσαν να ερμηνευθούν από την τότε αποδεκτή κλασική θεωρία) είναι τα εξής:

- Ο αριθμός των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων (ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος) είναι ανάλογος προς την ένταση του προσπίπτοντος φωτός (αποδεκτό για την κλασική θεωρία) ενώ η μέγιστη κινητική τους ενέργεια είναι ανεξάρτητη της έντασης αυτής (θα έπρεπε να ήταν ανάλογη).
- Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι ανάλογη προς τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός (και όχι προς την έντασή του, όπως αναμενόταν).
- Φωτοηλεκτρικό ρεύμα (φωτοηλεκτρόνια) εμφανίζονται μόνο όταν η συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός υπερβεί μια ορισμένη τιμή (συχνότητα κατωφλίου) (ενώ δεν θα έπρεπε να υπάρχει οριακή συχνότητα).
- Τα φωτοηλεκτρόνια εκπέμπονται από την μεταλλική επιφάνεια αμέσως μόλις αυτή φωτιστεί (άρα η μεταβίβαση της ενέργειας είναι στιγμιαία και όχι βαθμιαία, όπως ορίζει η κλασική θεωρία).

Οι υποθέσεις του Αϊνστάιν για την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:

- Το φως (συχνότητας f) αποτελείται από μια δέσμη "φωτεινών πακέτων" (φωτονίων) που το καθένα φέρει ενέργεια $E=hf$.
- Κάθε φωτόνιο μπορεί να δώσει την ενέργειά του σε (και άρα να εξάγει) ένα μόνο ηλεκτρόνιο, και η μεταφορά αυτή της ενέργειας γίνεται ακαριαία.

Άρα, αν η ελάχιστη ενέργεια με την οποία το ηλεκτρόνιο είναι δέσμιο στο μέταλλο (που ισούται με το έργο το οποίο χρειάζεται για την υπερνίκηση των δυνάμεων που το κρατούν δέσμιο, και λέγεται έργο εξαγωγής) είναι Φ , τότε η μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων (K_{max}) θα δίδεται από

$$hf = K_{max} + \Phi.$$

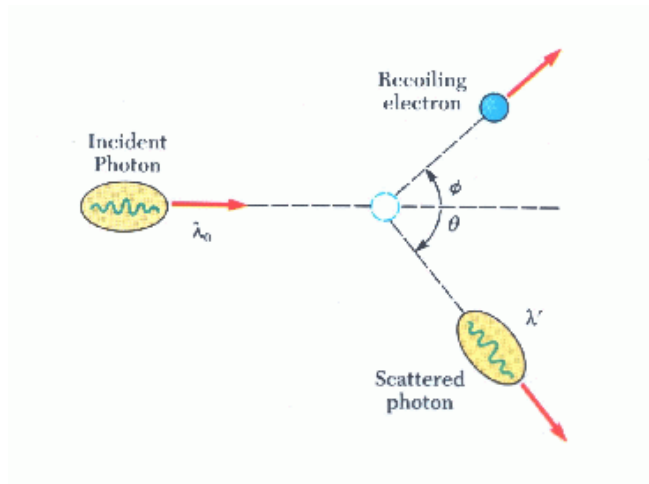
Η παραπάνω εξίσωση είναι η **εξίσωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου**.

Πώς ερμηνεύει η εξίσωση αυτή και οι δύο πιο πάνω υποθέσεις τα πειραματικά δεδομένα για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο;

1.e. Φαινόμενο Compton

Το φαινόμενο Compton είναι η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (φωτονίων) από φορτισμένα σωματίδια. Κατά τη σκέδαση αυτή η συχνότητα της σκεδαζόμενης δέσμης: (α) είναι μικρότερη από εκείνη της προσπίπτουσας και (β) η μείωση αυτή εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης. (Σύμφωνα με την κλασική θεωρία, σκεδαζόμενη και προσπίπτουσα δέσμη θα έπρεπε να έχουν την ίδια συχνότητα.)

Το φαινόμενο Compton ανακαλύφθηκε από τους Debye και Compton, ανεξάρτητα, στις αρχές του 20ου αι. (1923) μελετώντας σκέδαση ακτίνων-X από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η σχηματική αναπαράσταση του φαινομένου δείχνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχ. 2: Σκέδαση φωτονίου από ελεύθερο ηλεκτρόνιο.

Ο Compton ερμήνευσε το φαινόμενο ως ελαστική κρούση ηλεκτρονίου-φωτονίου (θεωρώντας τα φωτόνια "σημειακά" σωματίδια), και, εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας και ορμής (σχετικιστικά), κατέληξε στην εξής **εξίσωση του φαινομένου Compton**:

$$\lambda' - \lambda_0 = (h / m_e c) (1 - \cos \theta).$$

Η ποσότητα $(h / m_e c) = \lambda_c = 0.0243 \text{ \AA}$ λέγεται μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου. Η ανακάλυψη και η ερμηνεία του φαινομένου Compton έδωσαν στον Compton, το 1927, το βραβείο Nobel.

1.f. Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός του φωτός

Οι βασικές αρχές του κυματοσωματιδιακού δυισμού του φωτός συνοψίζονται στα παρακάτω.

- Το φως έχει και κυματικό και σωματιδιακό χαρακτήρα (αποτελείται από αδιαίρετα "πακέτα" που φέρουν ενέργεια και ορμή, τα φωτόνια ή κβάντα φωτός).
- Οι βασικές σχέσεις που συνδέουν τα κυματικά χαρακτηριστικά του φωτός (συχνότητα (f), μήκος κύματος (λ)) με τα σωματιδιακά του χαρακτηριστικά (ενέργεια (E), ορμή (p)) είναι οι εξής:

$$E = hf, \quad p = h/\lambda.$$

(Για το φως $E = pc$ και άρα $\lambda f = c$. Η σχέση $E = pc$ προκύπτει από τη γενική σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής, $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, για σωματίδια χωρίς μάζα, $m = 0$.)

1.g. Χρήσιμοι μαθηματικοί τύποι

Σχετικιστική ορμή: $p = \gamma m v$ με $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Για $v \ll c$, $p = m v$ (v ταχύτητα)

Σχετικιστική κινητική ενέργεια: $K = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 = \gamma m c^2$. Για $v \ll c$, $K = p^2/2m$

Μαθηματικοί τύποι:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \dots, \text{ για } x \ll 1$$

$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots, \text{ για } x \ll 1$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2! + \dots$$

$$\sin(\theta) = \theta - \theta^3/3! + \dots, \quad \cos(\theta) = 1 - \theta^2/2! + \dots, \quad \tan(\theta) = \theta + \theta^3/3 + \dots$$