

Το κβαντομηχανικό «σκαλοπάτι δυναμικού»

[Το φαινόμενο της ανάκλασης]

I. Το πρόβλημα

	<p>Ένα σωματίδιο που έρχεται από αριστερά συναντά στο σημείο $x = 0$ μια περιοχή ($x > 0$) με δυναμική ενέργεια $V_0 > 0$ αλλά μικρότερη από την ενέργεια E του σωματιδίου. Κλασικά το σωματίδιο θα μπει σ' αυτή την περιοχή και θα συνεχίσει την κίνησή του προς τα δεξιά ενώ κβαντομηχανικά υπάρχει μια πεπερασμένη πιθανότητα να ανακλαστεί και να επιστρέψει στην περιοχή $x < 0$. Και το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί ο <u>συντελεστής ανάκλασης</u> R συναρτήσει της ενέργειας E του σωματιδίου.</p>
--	--

II ... και η λύση του: Υπολογισμός του συντελεστή ανάκλασης

<p>Περιοχή A: $\psi_A'' + \underbrace{(2mE/\hbar^2)}_{k^2} \psi_A = 0 \Rightarrow \psi_A = A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}$</p>	<p>Προσπίπτοντα σωματίδια</p>	<p>Σωματίδια που ανακλώνται</p>
<p>Περιοχή B: $\psi_B'' + \underbrace{(2m(E-V_0)/\hbar^2)}_{k'^2} \psi_B = 0 \Rightarrow \psi_B = B e^{-ik'x}$</p>	<p>Σωματίδια που προχωρούν προς τα δεξιά</p>	

Συνθήκες συνέχειας της ψ και της παραγώγου της στο $x = 0$

$$\psi_A(0) = \psi_B(0) \Rightarrow A_+ + A_- = B$$

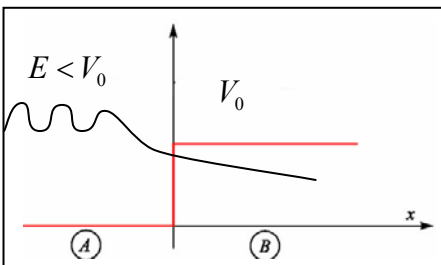
$$\psi_A'(0) = \psi_B'(0) \Rightarrow ikA_+ - ikA_- = ik'B$$

$$\text{Συντελεστής ανάκλασης: } R = \left| \frac{A_-}{A_+} \right|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E/(E-V_0)} - 1}{\sqrt{E/(E-V_0)} + 1} \right)^2$$

Συμπέρασμα: Στην κβαντομηχανική το σωματίδιο έχει μη μηδενική πιθανότητα να ανακλαστεί στο «σκαλοπάτι» και να επιστρέψει, παρ' ότι η ενέργεια του τού επιτρέπει να συνεχίσει την κίνησή του προς τα δεξιά.

Κλασσικό ανάλογο: Η ανάκλαση των ΗΜ κυμάτων (π.χ. φως) κατά την (κάθετη) πρόσπτωση τους στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων με διαφορετικό δείκτη διάθλασης.

III. Πρόσπτωση με $E < V_0$: Διείσδυση σε κλασικά απαγορευμένες περιοχές



$$\psi_B'' + \underbrace{(2m(E-V_0)/\hbar^2)}_{-\gamma^2} \psi_B = 0 \Rightarrow \psi_B = B e^{-\gamma x} \quad \left| \begin{array}{l} \text{όπως προηγουμένως} \\ \text{αλλά με } k' = i\gamma \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R(E < V_0) = R(E > V_0) \Big|_{k'=i\gamma} = \left| \frac{k - k'}{k + k'} \right|_{k'=i\gamma}^2 = 1$$

➤ Για $E < V_0$ το σωματίδιο πάντα ανακλάται. Έχει όμως τη δυνατότητα να διεισδύει «προσωρινά» στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή $x > 0$, χωρίς πάντως να μπορεί να φτάσει ως το άπειρο λόγω της εκθετικής απόσβεσης της κυματοσυνάρτησης σ' αυτή την περιοχή.

➤ Αν όμως το σκαλοπάτι έχει πεπερασμένο πλάτος τότε η εκθετική απόσβεση θα ανακοπεί και το σωματίδιο θα καταφέρει να περάσει από την άλλη μεριά μιας κλασικά απαγορευμένης περιοχής (φαινόμενο σήραγγας).

